1 Wahrscheinlichkeitsrechung/Stochastik

1.1 Zufallsexperiment

Ergebnismenge
$S = \{e_1; e_2; e_3 \ldots; e_n\}$ mit allen möglichen Ergebnissen e_1 bis e_n. Bei jeder Durchführung des Zufallsexperiments muss genau eines der in S enthaltenen Ergebnisse einsetzen.

Die Durchführung Zweier Zuf.Exp. nacheinander, kann als ein Zufallsexperiment aufgefasst werden. Dann heißt es zweistufiges Zuf.ex. Ergebnissmengen lassen sich z.B. als (geordnete) Paare angeben. Allgemein ist jedes Zufallsexperiment beliebig oft hintereinander ausführbar d.h. dann mehrstufiges Zuf.ex..

Jede **Teilmenge A** einer Ergebnismenge **S** ist ein Ereignis. Ein Ereignis A ist aufgetreten, wenn das Ergebnis des Zuf.ex. in der Teilmenge A enthalten ist. Mögliche Teilmengen u.a.:

- S selbst(sicheres Ereignis)
- die Leere Menge {}

ist Ergebnis nicht in A, so ist das Gegenereignis $\bar{A}$ eingestreten.

1.2 Wahrscheinlichkeit

Ist ein Zahlenwert, der einem bestimmten Ergebnis oder Ereignis zugeordnet wird (Wahrscheinlichkeitsverteilung).

Gesetz der großen Zahlen Wenn Zuf.ex. sehr häufig wiederholt wird, gibt der Wahrscheinlichkeitswert an, mit welcher relativen Häufigkeit (z.B. 40 von 100) ein bestimmtes Ereignis idealerweise eintreten wird.
Für die Wahrscheinlichkeit **P** eines Ereignisses aus der Menge $S = \{e_1; e_2; e_3 \ldots; e_n\}$ gilt allgm.

- $0 \leq P(e_i) \leq 1$
- $P(e_1) + P(e_2) + \cdots + P(e_n) = 1$

Für die Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A ist es oft günstig, diese mit Hilfe des Gegenereignisses anzugeben. Es gilt dann:

- $P(A) = 1 - P(\bar{A})$

ferner gilt:

- $P(\{\}) = 0$
  (unmögliches Ereignis)
- $P(s) = 1$
  (sicheres Ereignis)

1.3 Gleichverteilung

mögliche Ergebnisse eines Zuf.ex. sind alle gleich wahrscheinlich. Solche experimente heiß en LaPlace-Experimente. Für Wahrscheinlichkeit P eines Ereignisses A, gilt dann

$$P(A) = \frac{\text{Anzahl der Ergebnisse wo A auftritt}}{\text{Anzahl aller mögl. Ergebnisse}}$$

Die für die Laplace-Formel benötigte Anzahl aller mögl. Ereignisse gibt die Kombinatorik mit dem Urnenmodell her:
Anzahl aller Möglichen als Anzahl Kugeln in Urne dargestellt. daraus Produktregel:
K Urnen mit $n_1, n_2, \ldots, n_k$ Kugeln dann gibt es $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots \cdot n_k$ Möglichkeiten aus jeder dieser Urnen genau eine Kugel zu ziehen.

k-gleiche Urnen mit n-Kugeln ergeben laut Produktregel $n \cdot n \cdot n \cdot \cdots = n^k$ mögl. aus jeder Urne genau 1 Kugel zu ziehen. Das ist analog zu:
aus 1 Urne mit n-kugeln k-mal eine Kugel zu ziehen (mit zürücklegen) ergibt auchn^k verschiedene Möglichkeiten.

Urne n-Kugeln k-ziehen ohne zurücklegen $n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot (n-k+1)$ Reihenfolgen möglich.→(mit jeder Ziehung bleibt ja 1 Kugel weniger zur Auswahl in der Urne).

Sonderfall: $n = k$ solange gezogen bis Urne leer. $n(n-1) \cdot (n-2) \cdot \cdots \cdot 2 \cdot 1 = n!$ mögl.

Urne n-Kugeln k-ziehen ohne zurücklegen ohne Berücksichtigung der Reihenfolge
$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdot\cdots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\cdots\cdot k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$ Kombinationen, da Reihenfolge keine Rolle spielt analog zu äufeinmal mit 1 Griff k-Kugeln ziehen.($\binom{n}{k}$ sprich n über k; nCr-Taste TR)

Additionssatz
Sind Wahrscheinlichkeiten von A und B bekannt, lässt sich die Wahrscheinlichkeit angeben, dafür das A oder B auftritt. Wahrscheinlichkeit „A oder B“ $(A \cup B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Falls sich A und B ausschließen), also $(A \cap B) = \{\} \rightarrow P(A \cap B) = 0$ („Sowohl A als auch B“) dann gilt :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **(spezieller Additionsasatz)**

spezielle Multiplikationssatz
Wenn Eintreten Ereignis A die Wahrscheinlichkeit für Ereignis B nicht beeinflußt, dann gilt:
$P(A \cap B = P(A) \cdot P(B))$, wenn dies gilt dann A und B voneinander Unabhängig.

Ordnet man bei Zuf.ex. den Ergebnisse vorher vereinbarte Größen (z.B. Gewinn in \$), wird diese Größe Zufallsvariable genannt. Stellt man die Zordnung der Variablen zu den Wahrscheinlichkeiten der Ergebnisse, tabellarisch dar, spricht man von Wahrscheinlihckeitsverteilung. Multipliziert man jede Variable mit der Wahrscheinlichkeit und addiert die Produkte erhält man den Erwartungswert:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6
x	-4	4	-3	4	-5	4
$P(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

$E(x) = -1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} - 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6}$

$E(x) = \frac{1}{2} = 0.5$

Streuung, also wie stark eine Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert abweicht, wird **Varianz** genannt. Die Wurzel daraus ist die **Standardabweichung**.

Bernoulli-Experiment
Sind Zuf.ex. mit nur 2 möglichen Ergebnissen. Münze Kopf,Zahl ; Lose Gewinn, Niete; QM-Prüfung i.O.,n.i.O. n-mal wiederholt spreicht man von einer Bernoulli-Kette der Länge n.

Pfaddiagramm
auch bei Bernoulli-Exp. möglich.Bernoullikette der Länge n mit Trefferwahrscheinlichkeit p. X gibt genaue Anzahl Treffer an. Wahrscheinlichkeit für genau k-Treffer:

$P(x = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{\text{n-k}}$

Zuordnung einer Wahrscheinlichkeit zu jedem möglichen Wert Treffer $k = 0; 1; 2; \ldots; n$ wird Binomialverteilung genannt.
Kurzschreibweise $P(X = k) = B_n; p(k)$

Erwartungswert Binomialverteilung
$E(x) = \mu = n \cdot p$

Varianz der Binomialverteilung
$V(x) = n \cdot p \cdot (1-p)$
Standardabweichung
$\sigma = \sqrt{V(x)} = \sqrt{n \cdot p(1-p)}$
Bemerkung: Eine Abwandlung zu Wahrscheinlichkeit von genau k-Treffern ist höchstens k-Treffern. $P(X \leq k)$. Solche Binomialverteilungen werden mit Tabellen berechnet. Wahrscheinlichkeit von mindestens k-Treffern gefragt, $P(X \geq k)$ wird
$P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k-1)$ erhalten.

1.4 GR abc

A α alpha
B β beta
Γ γ gamma
Δ δ delta
E ϵ ε (v)epsilon
Z ζ zeta
H η eta
Θ θ ϑ (v)tetha
I ι iota
K κ kappa
Λ λ lambda
M μ mü
N ν nü
Ξ ξ xi
O o o
Π π pi
P ρ ϱ (v)rho
Σ σ sigma
T τ tau
Υ υ upsilon
Φ ϕ φ (v)phi
X χ chi
Ψ ψ psi
Ω ω omega

2 Trigonometrisches

2.1 Allgemeines Dreieck

$a + b > c$
$a + c > b$
$b + c > a$

2.2 Rechtwinkliges Dreieck

Phythagoras
$c^2 = a^2 + b^2$
$Hyp^2 = Kathete1^2 + Kathete2^2$

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\sin\alpha = \frac{Gegk}{Hyp}$

$\cos\alpha = \frac{Ank}{Hyp}$

$\tan\alpha = \frac{Gegk}{Ank} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cot\alpha = \frac{Ank}{Geg} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha}$

2.3 Sinussatz

$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$

$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{b}{c}$

$\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{a}{c}$

2.4 Cosinussatz

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

2.5 Additionstheoreme

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$
$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$
$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

2.6 Nützliches I

$\sin 30° = \frac{1}{2}$ $\cos 30° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

$\sin 60° = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\cos 60° = \frac{1}{2} = 0.5$

$\sin 90° = 1$ $\cos 90° = 0$

2.7 Nützliches II

$\cos(\alpha + 180°) = -\cos\alpha$

$\sin(\alpha + 180°) = -\sin\alpha$

$\sin(90° - \alpha) = \sin(90° + \alpha) = \cos\alpha$

$\cos(90° - \alpha) = -\cos(90° + \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(180° + \alpha) = -\sin\alpha$

$\cos(180° - \alpha) = \cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(360° - \alpha) = \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$

$\cos(360° - \alpha) = \cos(-\alpha) = \cos(\alpha)$

$\sin(360° + \alpha) = \sin(\alpha)$

$\cos(360° + \alpha) = \cos(\alpha)$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
Für alle α gilt: Summe der Quadrate von Sin und Cos ergeben genau 1.
Trigonometrisches Phythagorassatz

2.8 Winkel Einheiten

Kreis 360°
$u = 2\pi r$
Im Bogenmaß $\frac{x}{\pi} = \frac{\alpha}{180°}$ in °
$\Leftrightarrow x = \pi\frac{\alpha}{180°}$

$$360° = 2\pi$$
$$180° = \pi$$
$$90° = \frac{\pi}{2}$$

3 Vektorenundso

3.1 Vektoren

Verbinden immer Zwei Punkte im Raum
$A(a_1/a_2/a_3)$ $B(b_1/b_2/b_3)$
$\Rightarrow \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} b_1-a_1 \\ b_2-a_2 \\ b_3-a_3 \end{pmatrix}$
definiert mit Betrag und Richtung z.B. Kraft, Geschwindigkeit. etc) Vgl Skalar nur mit Betrag definiert(z.B. Temp, Masse).

3.2 Betrag eines Vektors

$\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \rightarrow \mid \vec{a} \mid = \sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^3}$
gilt: $\mid \vec{a_0} \mid = 1 \rightarrow$ Einheitsvektor
$\mid \vec{a_0} \mid = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

3.3 Sei α $\vec{a}$ $\vec{b}$

$\Rightarrow Skalarprodukt$
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \mid \vec{a} \mid \cdot \mid \vec{b} \mid \cdot \cos\alpha$
ebenso gilt:
$\vec{a}\cdot\vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$
$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
$(Kraft \cdot Kraft = Skalar)$

3.4 Vektoraddition

$\vec{a}+\vec{b} = \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1 \\ \mathrm{a}_2 \\ \mathrm{a}_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{b}_1 \\ \mathrm{b}_2 \\ \mathrm{b}_3 \end{pmatrix}$
$= \begin{pmatrix} \mathrm{a}_1+b_1 \\ \mathrm{a}_2+b_2 \\ \mathrm{a}_3+b_3 \end{pmatrix}$ Die Vektoraddition ist kommutativ und assoziativ

$\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$

$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = (\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$
. $= \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$

3.5 Vielfaches eines Vektors

$t \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{t}\cdot a_1 \\ \mathrm{t}\cdot a_2 \\ \mathrm{t}\cdot a_3 \end{pmatrix}$

assoziativ und Distributiv :
$s\cdot(t\cdot\vec{a}) = (s\cdot t)\vec{a}$

$t\cdot(\vec{a}+\vec{b}) = t\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{b}$
$(s+t)\cdot\vec{a} = s\cdot\vec{a}+t\cdot\vec{a}$

3.6 Ger. in Vektordarstell.

$\vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{v}$ (Parameterform)
$\vec{p} : Stützvektor$
$\vec{v} : Richtungsvektor$
$t : Parameter$

Gilt für g: $\vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{v}$ h: $\vec{x} = \vec{q}+s\cdot\vec{u}$
$\vec{p}+t\cdot\vec{v} = \vec{q}+s\cdot\vec{u}$
a) genau eine Lösung
$\mathrm{s}_0, t_0 \rightarrow$ Ein Schnittpunkt
b) unendlich viele Lösungen
s,t $\rightarrow$ g und h sind identisch
c) keine Lösung für s,t
$\vec{u} = k\cdot\vec{v} \rightarrow$ g und h sind parallel
$\vec{u} \neq k\cdot\vec{v} \rightarrow$ g und h sind parallel

3.7 Abstand Punkt Gerade

Punkt R von Gerade $g : \vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{v}$

1. Stelle Gleichung einer zu g orthogonalen Ebene $E(\vec{n} = \vec{v})$ durch R auf.
2. berechne Schnittpunkt F von g und E.
3. Berechne den Abstand von R zu F($\mid \overrightarrow{RF} \mid$)

3.8 Abst. Windsch. Geraden

Geraden g: $\vec{x} = \vec{p}+s\cdot\vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{q}+t\cdot\vec{v}$
Mit $\vec{n_0} \perp \vec{u}$ $\vec{n_0} \perp \vec{v}$
$\vec{n_0} : Normaleneinheitsvektor$
Abstand $d = \mid (\vec{q}-\vec{p}) - \vec{n_0} \mid$

3.9 Wink. Geraden Ebenen

Geraden g: $\vec{x} = \vec{p}+s\cdot\vec{u}$ h: $\vec{x} = \vec{q}+t\cdot\vec{v}$
Ebenen:

$E_1 : (\vec{x}-\vec{p_1})\cdot\vec{n_1} = 0$
$E_2 : (\vec{x}-\vec{p_2})\cdot\vec{n_2} = 0$

$g\angle h$ $\cos\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}$

$g\angle E_1$ $\sin\alpha = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{n_1}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{n_1}|}$

$E_1\angle E_2$ $\sin\alpha = \frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}$

3.10 Ebene in Normaldarstel.

$(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$
mit: $\vec{p}$ Stützvektor
$(\vec{n} \perp E)$ $\vec{n}$ Normalenvektor

Ist $ax_1+bx_2+c_x3 = d$
eine Koordinatenform von E, ist
$\vec{n} = \begin{pmatrix} \mathrm{a} \\ \mathrm{b} \\ \mathrm{c} \end{pmatrix} einNormalenvektorvonE.$

3.11 Hesse'sche Normalform

$(\vec{x}-\vec{p})\cdot\vec{n} = 0$

$\vec{p}$ Stützvektor
$\vec{n_0}$ Normaleneinheitsvektor
(normalvektor mit Länge 1)
Abstand d zur Ebene
$d = \mid (\vec{r}-\vec{p})\cdot\vec{n_0} \mid$
$\vec{r}$: Ortsvektor von $R(r_1/r_2/r_3)$
Für Koordinatenform der Ebene: $n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3 = b$ erhält man

$d = \mid \frac{n_1r_1+n_2r_2+n_3r_3-b}{\sqrt{n_1^2+n_2^2+n_3^2}} \mid$

3.12 Ebenen

Vektordarstellung Parameterform
$\vec{x} = \vec{p}+s\cdot\vec{u}+t\cdot\vec{v}$
$\vec{p}$ Stützvektor
$\vec{u},\vec{v}$ Spannvektoren
Koordinatenform
$ax_1+bx_2+cx_3 = d$ s,d $Parameter$

---

g: $\vec{x} = \vec{p}+t\cdot\vec{u}$ E: $\vec{x} = \vec{q}+r\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}$
gilt für $\vec{p}+t\cdot\vec{u} = \vec{q}+r\cdot\vec{v}+s\cdot\vec{w}$
a)1 Lösung $r_0, s_0, t_0 \rightarrow$ 1 SP für g&E
b)unendl. viel Lösungen für $r,s,t \rightarrow$ g liegt in E $(g \in E)$
c)Keine Lösung$\rightarrow$ $(g \notin E)$ & $(g \| \mathrm{E})$

4 Manche Regeln

zum Beginn Mengen

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \dots\}$
$\mathbb{Z} = \{\dots - 1, -2, -3, 0, 1, 2, 3 \dots\}$
$\mathbb{Q} = \{\frac{a}{b} \left| \begin{array}{c} \text{a,b} \in \mathbb{Z} \\ \text{b} \neq 0 \end{array} \right.\}$
$\mathbb{C} = \{\Re, \Im\}$

R1

$-(\dots) \rightarrow$ Alle Vorzeichen innerhalb der Klammer drehen sich um

R2

Multiplikation von 2 Klammerausdrücke in denen nur addiert oder subtrahiert wird $\rightarrow$ jedes mit jedem multiplizieren.

R3

Minus aus Klammer herausziehen, indem Vorzeichen in der klammer umgedreht werden $\leftrightarrow$Vorzeichen in einer Klammer umdrehen, indem ein Minus herausgezogen wird.

R4

Zerlegung einer Summe in Faktoren$\rightarrow$ gemeinsame Faktoren aus Summanden herausklammern

R5 binomische Formeln

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$
$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$

R6 Potenzen

$a^n \cdot a^m = a^{\text{n+m}}$
$\text{a}^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
$\frac{a^n}{a^m} = a^{\text{n-m}}$
$a^{\text{-n}} = \frac{1}{a^n}$
$(a^n)^{\text{m}} = \text{a}^{(\text{n} \cdot m)}$

Wurzeln

Def. $x = \sqrt[n]{a}\ falls$ a=x^n
Wurzelinhalt heißt auch Radikant
hier n − Wurzelexponent

Addition $\rightarrow$nach gleichartigen Gliedern ordnen und zusammenfassen

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$

$a \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n \cdot b}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a^x} = (\sqrt[n]{a})^x$

$\sqrt[mn]{a^{\text{mx}}} = \sqrt[n]{a^x}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$

$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}$

Bemerkung:
$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[2]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$

$\sqrt[3]{x} = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}}$

Bemerkung: Bei Quadrieren von Wurzelgleichungen kann unterwegs etwas verloren gehen. $\rightarrow$ ermittelte Lösung immer zur Probe in die Ausgangsgleichung einsetzen und überprüfen.

Logarithmen

Def. *Sei* $a, x > 0$
Dann ist der Logarithmus von x zur Basis a die Zahl mit der $a$potenziert wird, um x zu erhalten.

$b = \log_a x \Leftrightarrow a^b = x$
$y = a^x \quad x = log_a(y)$

Bemerkung zum Logarithmus eines Kehrwertes:

$log_a \frac{1}{x} = log_a 1 - log_a x$
$. \quad\quad = \ 0 \quad\ - log_a x = -log_a x$

$\Rightarrow$Log von Kehrwert ist -Log(Wert)

Rechenregeln für Logarithmen:

$f\ddot{u}r\ x, y > 0$

i) $log_a(xy) = log_a(x) + log_a(y)$

ii) $log_a(\frac{x}{y}) = log_a(x) - log_a(y)$

iii) $log_a(xy) = y \cdot log_a(x)$

iv) $log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} log_a(x)$

**) $log_b(x^t) = t \cdot log_b(x)$

für $x > 0$
$log_2(x) = \frac{ln(x)}{ln(2)}$

ln Logarithmus Naturalis (Basis e)
lg Dekadische Log (Basis 10)
lb binärer Log (Basis 2)
Umrechnung: $log_b(x) = \frac{log_a(x)}{log_a(b)}$

Noch was:

Jede Exponentialfunktion der Form $f(x) = b^x$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ lässt sich mit der Basis e wie folgt schreiben:
$f(x) = e^{k \cdot x}$ mit $k = ln(b)$

Wachstum und Zerfall

beschrieben durch folgende Differentialgleichung:
$f(t) = k \cdot f(t)$
$f(t) = a \cdot e^{\text{kt}}$ mit $a = f(0)$
$k > 0 \rightarrow$Wachstum $k = ln(1 + \frac{p}{100})$
$k < 0 \rightarrow$Zerfall $k = ln(1 - \frac{p}{100})$
(ˆˆ p:%/d)

Verdoppelzeit: $T_V = \frac{ln2}{k}$
Halbwertszeit: $T_H = -\frac{ln2}{k}$

5 Gleichung & Funktion

Definitionsbereich zugelassenes für unabhängige Variable.
z.B. ohne 0 bei $\frac{1}{x}$ oder $\frac{1}{x^2}$
oder 3 bei $\frac{1}{x-3}$

Lineare Funktionen

Eine Funktion der folgenden Form heißt lineare Funktion.
$y = ax + b$

$P_1(x_1, y_1)$ $P_2(x_2, y_2)$ dann
$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \mid \cdot(-1)$ $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Quadratische Funktionen

$y = ax^2 + bx + c$
Kurve einer quadr.Gl. Parabel
Kurve von $y = x^2$ Normalparabel

Tipp:Quadratische Ungleichungen werden gelöst i.d. sie auf die Normalform gebracht werden.$x^2 + px + q > 0$ oder $x^2 + px + q < 0$ und dann wie die Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit PQ-Formel gelöst werden.
mit $x_1 < x_2$

PQ-Formel

$y = x^2 + px + q$
$y = (x + a^2) + b$
mit
$a = \frac{p}{2}$ $\quad b = (q(\frac{p}{2})^2)$

$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{(\frac{p}{2})^2 - q}$

Polynom

Summe aus mit Koeeffizienten multiplizierten Potenzen.

$P(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{\hat{\imath}}$

$y = nx^n + a_{n\text{-}1}x^{n\text{-}1} + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x^1 + a_0x^0$
Polynome mit Gliedern gerader und ungerade Ordnung:

$y = a_{2n+1}x^{2n+1} + a_{2n}x^{2n)} + a_{2n\text{-}1}x^{2n\text{-}1} + \ldots + a_1x^1 + a_0x^0$

Ableitungen

Steigung m einer Tangente durch Punkt $P(x_0; f(x_0))$ der Funktion $f(x)$ ist identisch mit der Ableitung f'(x) von $f(x)$ an der Stelle x$_0$:m=f'(x_0).
Anders formuliert(eigene):
$f'(x)$ ist die Steigung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x

Potenzregel
$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = n \cdot x^{n\text{-}1}$

Faktorregel
$f(x) = c \cdot g(x) \rightarrow f'(x) = c \cdot g'(x)$

Summenregel
$f(x) = g(x) + h(x)$

$\Rightarrow f'(x) = g'(x) + h'(x)$

Produktregel
$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$\Rightarrow f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel
$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$

Kettenregel
$f(x) = u(v(x))$

$\Rightarrow f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Trigonometrische
$f(x) \sin(x) \rightarrow f'(x) = \cos(x)$

$f(x) \cos(x) \rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

Exponential
$f(x) = e^x \rightarrow f'(x) = e^x$

Kettenregel bei ExpFun
$f(x) = e^{v(x)} \rightarrow f'(x) = e^{v(x)} f'(x)$

Kurvendiskussion

Symmetrien
Nullstellen
Asymptoten
Extrempunkte
Wendepunkte

Extremstellen

$E(x_0; f(x_0))$

$f'(x_0) = 0 \qquad (= m)$
$f''(x_0) > 0 \rightarrow lok.min.$
$f''(x_0) < 0 \rightarrow lok.max.$

Wendeestellen

$W(x_0; f(x_0))$

$f''(x_0) = 0$ & $f'''(x_0) \neq 0$*

wenn zusätzlich $f'(x_0) = 0 \rightarrow$ Sattelpunkt.

*oder
$f''(x_0 + h) = -f''(x_0 - h)$
(Vorzeichenwechsel von $f''(x)$)

Extremwertprobleme

1.) Beschreibe Göße, die extremal werden soll, durch einen Term (auch mehrere Variablen möglich) **2.)**bestimmende einschänkende Nebenbedingung **3.)**einsetzen der Nebenbedingung in Ausgangsterm liefert Zielfunktion **4.)**Bestimme Extremwerte der Zielfunktion

Stammfunktion

Jede Funktion $F(x)$, für die gilt $F'(x) = f(x)$ heißt Stammfunktion von $f(x)$

Allgm. Aufleitungsregeln

$f(x) = x^n \rightarrow F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$

$f(x) = c \cdot g(x)$
$\rightarrow F(x) = c \cdot (G(x))$

$f(x) = g(x) + h(x)$
$\rightarrow G(x) + H(x)$

$f(x) = u(v(x))$ mit $v(x) = ax + b$
$\Leftrightarrow$ $\qquad f(x) = u(ax + b))$
$\rightarrow F(x) = \frac{1}{a}U(ax + b)$

$f(x) = e^{ax+b}$
$\rightarrow F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b}$

$f(x) = e^x \rightarrow F(x) = e^x$:)

Hauptsatz der Diff& Integrationsrechung

$f(x)$, x-Achse, $x = a$ und $x = b$ begrenzen eine Fläche deren Wert gegeben ist durch das Integral:
$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$

$f(x)$ darf zw. a und b keine Nullstellen haben.
für $f(x) \leq 0$ gilt:

$\int_a^b \mid f(x) \mid dx = -\int_a^b f(x)dx$

$-\int_a^b f(x)dx = -[F(x)]_a^b = [F(x)]_b^a$

Fläche umschlißende 2 Funktionen

Wenn $f(x)$ $g(x)$ mit $f(x) \geq g(x)$ und $x = a$ und $x = b$ Fläche A einschließen gilt:
$A = \int_a^b(f(x) - g(x))dx$ für alle $x \in [a, b]$

Integralregeln

$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

$\int_a^b(f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$

$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$